Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO

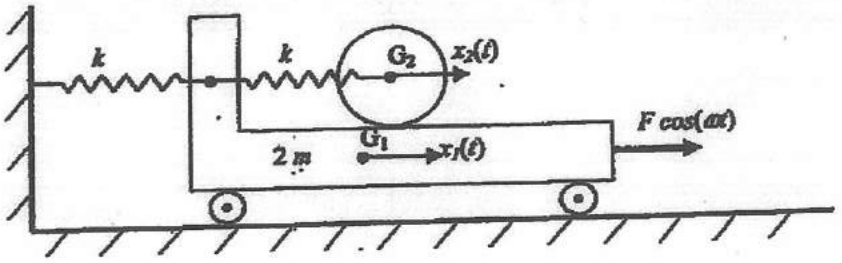


Figura 2

3. A viga representada na Figura 3 tem comprimento L, secção transversal de área A e segundo momento de área I (m^4); o módulo de elasticidade do material é representado por E e a massa volúmica por ρ. A viga está apoiada em dois apoios simples na extremidades e ligada a duas molas, a primeira tem rigidez k e a segunda é uma mola de torção com rigidez k_t. Considere apenas movimentos devidos à flexão da viga, sendo os deslocamentos pequenos.

a) Quais são as condições fronteira do sistema?

b) A função $V(x)=\delta sen(\pi x/L)$ pode ser aplicada para obter uma estimativa para a frequência fundamental de vibração através do método da energia de Rayleigh; ou seja, é uma função admissível?

c) Obtenha uma estimativa para a frequência fundamental de vibração.

d) A função sugerida em b) é aplicável para as seguintes condições limite:

1) $k \to 0$ e $k_t \to 0$?

2) $k \to \infty$ e $k_t \to 0$?

e) Sugira uma função admissível para o caso em que a mola a meio vão é substituída por um apoio simples.

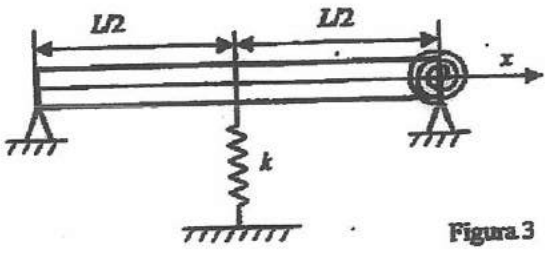


Figura 3

Justifique as respostas.

Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO

1.

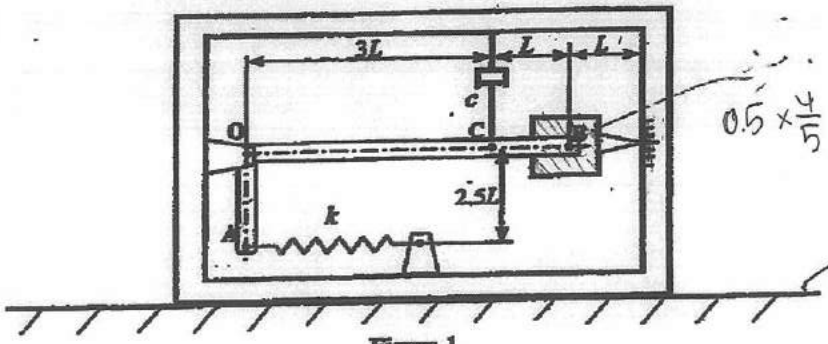


Figura 1

O desenho (Figura 1) representa um instrumento para medir a amplitude do deslocamento vertical de vibração de uma superfície. O instrumento é constituído por:
- Um braço rígido AOB em forma de L, de massa desprezável e que roda em torno do ponto O;
- Um corpo rígido de massa de m e momento de inércia I_B (unidades kg m^2) em relação a um eixo que passa por B; este corpo encontra-se ligado ao braço no ponto B;
- Um amortecedor de constante de amortecimento c, ligado ao braço no ponto C;
- Uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A.

Em equilíbrio estático o segmento OB encontra-se na horizontal. Assuma que os deslocamentos são pequenos.

a) Obtenha a equação do movimento de rotação do braço.

Suponha que a frequência natural não amortecida do instrumento é 2.5 Hz, a razão entre duas amplitudes consecutivas de vibração em regime livre é 111 e a massa é 0.5 Kg. Suponha ainda que a equação do movimento angular é:
$25m\ddot{\theta}(t)+9c\dot{\theta}(t)+6.25k\theta(t)=0$
Determine:

b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a constante de amortecimento;
e) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície quando a frequência de vibração é 2 Hz e o ponteiro indica uma amplitude de 0.5 mm (nota: o instrumento não se encontra calibrado).

2. O sistema representado na Figura 2 é constituído por um carro rígido de massa $2m$, ligado ao exterior por uma mola de rigidez k, que translada na direcção horizontal (deslocamento $x_1(t)$) por acção de uma solicitação harmónica $F\cos(\omega t)$. Tendo-se verificado a existência de vibrações indesejáveis acrescentou-se um disco rígido de massa m e raio R (momento de inércia $mR^2/2$ [kg m^2]) ligado ao carro por uma mola de rigidez k. O disco rola sem escorregar sobre o carro e $x_2(t)$ designa o deslocamento absoluto do seu centro de massa na horizontal. Determine

a) as equações do movimento recorrendo às Equações de Lagrange;
b) as frequências naturais e as formas naturais de vibração;
c) as equações de movimento na base modal;
d) o valor da frequência de excitação para a qual a amplitude de vibração do carro é nula.

Exame Especial de Vibrações – 23/12/05

CONFIRMAR!

2. $J_{G_2} = m \frac{R^2}{2}$ $Kg\,m^2$ ← Penso que não é o J_{G_2}

a) $T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$

Forças não - conservativas:

$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(F \cos(wt) \cdot x_1\right) = F \cos wt$

$Q_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(F \cos(wt) \cdot x_1\right) = 0$

Então:

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$

$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial x_1} = kx_1 - k(x_2 - x_1) = 2kx_1 - kx_2$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$

$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) = -kx_1 + kx_2$

Ficando:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) = F\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + kx_2(t) = 0 \end{cases}$$

Not. matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime livre:

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{2k(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{m}} \cong$$

$$\cong 0{,}5412\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{V} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2k(\sqrt{2}+2)}}{2\sqrt{m}} \cong 1{,}3066\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1ª Forma natural:

$$\left(2k - 2m\omega_1^2\right)u_{11} - k\,u_{21} = 0 \Rightarrow u_{11} = \frac{A}{2A - 2m \times \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\cdot\frac{k}{m}}\,u_{21}$$

$$\Leftrightarrow u_{11} = \frac{1}{2-(2-\sqrt{2})}\,u_{21} \Rightarrow u_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{21}$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$(2k - 2m\omega_2^2)\,u_{12} - k\,u_{22} = 0 \Leftrightarrow u_{12} = \frac{1}{2 - 2\times\frac{(\sqrt{2}+2)}{2}}\,u_{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{12} = \frac{1}{-\sqrt{2}}\,u_{22} \Leftrightarrow u_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{22}$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalização de $\{u\}$:

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}}\,\{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & -\frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F\cos wt \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2\sqrt{m}} \\ -\frac{F}{2\sqrt{m}} \end{Bmatrix} \cos wt .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{k}{m} \eta_1(t) = \frac{F}{2\sqrt{m}} \cos wt \\ \ddot{\eta}_2(t) + \frac{(2+\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{k}{m} \eta_2(t) = -\frac{F}{2\sqrt{m}} \cos wt \end{cases}$$

d) Através de b):

$$\begin{bmatrix} 2k - 2mw^2 & -k \\ -k & k - mw^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(w) \\ X_2(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pág. 186:

$$X_1(w) = \frac{(k - mw^2) F - 0}{(2k - 2mw^2)(k - mw^2) - k^2}$$

Como queremos: $X_1(w) = 0 \Rightarrow (k - mw^2) F = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F = 0 \ \vee \ k - mw^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ //

3. a)

$$v(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad (1)$$

$$v(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = K_t \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = \frac{K_t}{EI} \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=l} \quad (4)$$

(1) e (2) cond. fronteira geométricas

(3) e (4) cond. fronteira naturais

b) É derivável pelo menos 2 vezes? Sim, função harmónica.

Verifica as cond. fronteira geométricas?

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} \times 0\right) = 0 \quad \checkmark \ (1)$$

$$V(x)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \times \cancel{l}\right) = 0 \quad \checkmark \ (2)$$

Logo, é uma função admissível!

c)
$$T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(V(x)\right)^2 dx + \cancel{T^*_{cfm}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{\rho A}{2} \int_0^l S^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T^*_{max} = \frac{\rho A}{2} \cdot S^2 \frac{l}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\rho A}{2} \cdot \frac{S^2 l}{2}$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l E I \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K \left(V\left(\frac{l}{2}\right) \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K_t \left(\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=l} \right)^2 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(-S \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} K S^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{l}}{2}\right) + \frac{1}{2} K_t \left(S \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \cdot \cancel{l}\right) \right)^2 =$$

$$= \frac{EI}{2} S^2 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \left(\frac{l}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \right) + \frac{1}{2} K S^2 + \frac{1}{2} K_t S^2 \frac{\pi^2}{l^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{EI}{l^4}\cdot\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}K_t\delta^2\frac{\pi^2}{l^2}$$

Então:

$$R(V(x)) = W^2 = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{EI}{l^4}\cdot\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}K_t\delta^2\frac{\pi^2}{l^2}}{\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{\delta^2 l}{2}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\cdot\left(\pi^4 + \frac{2K}{l} + \frac{2\pi^2 K_t}{l}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{\pi^4 + \frac{2K}{l} + \frac{2\pi^2 K_t}{l}}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d)

1) $K \to 0$ não altera as cond. fronteira geométricas

$K_t \to 0$ não altera as cond. fronteira geométricas.

Logo, a função sugerida em b) continua aplicável

2) $K_t \to 0$ não altera as cond fronteira geométricas

$K \to \infty$ ALTERA. Passa a haver um apoio simples para $x = \frac{L}{2}$

Vejamos se a função de b) ainda verifica

as condições fronteira.

$$V(x)\Big|_{x=\frac{l}{2}} = 0 \Rightarrow S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{k}\cdot\frac{k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow S = 0$$

Mas se $S = 0$ então $V(x) = 0$ o que não pode ser.

Conclui-se que quando $K \longrightarrow \infty$ a função deixa de ser admissível.

e) Continuando a considerar uma função harmónica, basta que o período da função seno seja igual a l.

$$V(x) = S \operatorname{sen}(\alpha x)$$

$$T = l \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = l \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{l}$$

conclui-se que:

$$\boxed{V(x) = S \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{l}\cdot x\right)}$$